

Title	Modular forms and modular linear differential equations related to simple Virasoro vertex operator algebras (Automorphic Forms and Related Topics)
Author(s)	境, 優一
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2017), 2055: 1-9
Issue Date	2017-10
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/237161">http://hdl.handle.net/2433/237161</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# Modular forms and modular linear differential equations related to simple Virasoro vertex operator algebras

九州大学・多重ゼータ研究センター 境 優一\*

Yuichi Sakai  
Multiple Zeta Research Center,  
Kyushu University

## 1 はじめに

$p$  を素数とする. 標数  $p$  の体  $K$  上定義される楕円曲線  $E$  に対して,  $E$  上の有理点に関する加法群  $E(\overline{K})$  が, 位数  $p$  の元を持たないとき,  $E$  は超特異 (*supersingular*) と呼ばれる. このとき, この楕円曲線の閉体上の同型類は有限個で, その  $j$ -不変量を丁度根とする多項式  $ss_p(X)$  は素体  $\mathbb{F}_p$  上での多項式となる:

$$ss_p(X) := \prod_{E: \text{supersingular}/\text{同型}} (X - j(E)) \in \mathbb{F}_p[X].$$

この多項式  $ss_p(X)$  について, Digne(cf. [22]), Atkin(cf. [13]) らによる研究がある. そして, Kaneko-Zagier([13]) においては複素上半平面  $\mathbb{H}$  で定義される 2 階の線型微分方程式

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau) = 0 \quad \left( ' = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{d}{d\tau} \right) \quad (1)$$

の解として現れるモジュラー形式により与えられる超幾何多項式が  $\text{mod } p$  をとることにより  $ss_p(X)$  となることを示している. ここで,  $E_2$  は 偶整数  $k(\geq 2)$  に対して定義される  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  に関する重さ  $k$  の Eisenstein 級数

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{d|n} d^{k-1} \right) q^n \quad (q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau})$$

---

\* dynamixaxs@gmail.com

のモジュラーではない (準モジュラーな) 例である. ここで,  $B_k$  は  $k$  番目の Bernoulli 数とする. また, (1) は Kaneko-Koike([9, 10]) により様々な有理数  $k$  に対するモジュラー/準モジュラー形式解についても explicit に与えている. 特に (1) は **Kaneko-Zagier** 方程式と呼ばれる線型微分方程式であり, “保型”線型微分方程式の代表例である.

この超特異多項式  $ss_p(X)$  の研究で現れた Kaneko-Zagier 方程式は, Kaneko-Nagatomo-Sakai([11]) において, 2次元共形場理論の指標の分類 (MMS-classification [18]) において用いられた 2 階線型微分方程式と同値であることが示されている. この研究により整数論の対象と特定の頂点作用素代数 (VOA) の対象が微分方程式を介してある種のつながりを与えていると捉えることができる.

本稿では, この Kaneko-Zagier 方程式と同様の考察を行う際に得られた結果を報告する. 具体的には, simple Virasoro VOA と呼ばれる頂点作用素代数に関して, 特定の場合において, 分数ウェイトのモジュラー形式と対応することを述べ, 特に分数ウェイトのモジュラー形式が満たす MLDE の階数について述べる. なお, 本稿では VOA に関する定義をせずに用いる為, 厳密な定義や基本事項, 特に本稿に関連する事項については, [16, 24] などを参照願いたい.

本研究に関して, VOA に関する様々なご助言を頂きました, 永友清和先生, 有家雄介さん, また, 研究集会を通して様々なご助言を頂きました伊吹山知義先生に心より感謝申し上げます.

## 2 保型線型微分方程式

$\Gamma_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ,  $k \in \mathbb{Q}$  とする. このとき, 複素上半平面  $\mathbb{H}$  で定義される  $n$  階の線型微分方程式

$$f^{(n)}(\tau) + A_1(\tau)f^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(\tau)f'(\tau) + A_n f(\tau) = 0 \quad (2)$$

が  $\Gamma_1$  に関する重さ  $k$  の保型線型微分方程式 (MLDE) であるとは,  $f$  が (2) の解であるとき,  $f|_k[\gamma]$  ( $\gamma \in \Gamma_1$ ) も解となることである. ただし, 係数関数  $A_i(\tau)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) は  $\mathbb{H}$  上正則であり,  $\Im(\tau) \rightarrow \infty$  で  $|A_i(\tau)|$  は有界であるとする. また,  $f|_k[\cdot]$  は

$$f|_k[\gamma] := (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \quad \text{for } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1$$

とする. このとき,  $A_i(\tau)$  は  $E_2, E_4, E_6$  の (重さ  $2i$  の) 同次多項式で与えられ, Serre 微分およびその合成

$$\vartheta_k(f) := f' - \frac{k}{12} E_2 f, \quad \vartheta_k^i = \vartheta_{k+2(i-1)} \circ \cdots \circ \vartheta_{k+2} \circ \vartheta_k$$

を用いて

$$\vartheta_k^n(f) + \sum_{i=2}^n P_{2i} \vartheta_k^{n-i}(f) = 0 \quad (P_{2i} \in \mathcal{M}_{2i}(\Gamma_1)) \quad (3)$$

と表せる ([21]). ここで,  $\mathcal{M}_k$  は重さ  $k$  のモジュラー形式の空間である. Kaneko-Zagier 方程式 (1) は Serre 微分を用いると

$$\vartheta_k^2(f) - \frac{k(k+2)}{144} E_4 f = 0 \quad (4)$$

と表せる<sup>\*1</sup>. 特に,  $E_2$  は Dedekind eta 関数  $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n>0} (1 - q^n)$  の対数微分の定数倍で与えられるので,  $\ker(\vartheta_k) = \mathbb{C} \cdot \eta(\tau)^{2k}$  であり,  $\vartheta_k(\eta^{2\ell} \cdot g) = \eta^{2\ell} \cdot \vartheta_{k-\ell}(g)$  である. よって (3) の表示は, MLDE の解空間の持つ情報は  $\eta(\tau)$  の冪だけずれても本質的には変わらないと言える. また, G. Mason はこの MLDE (3) をベクトル値モジュラー形式の基底の構成に用いている ([19]). 特に次の条件が重要な役割を果たす.

**Proposition 1** ([19, Theorem 4.3]). 線型独立な  $\mathbb{H}$  上の正則関数

$$f_i = q^{\lambda_i} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^i q^m \right) \quad (\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n)$$

を成分に持つ  $n$  次元ベクトル値モジュラー形式が重さ  $k$  の  $n$  階 MLDE の解となる必要十分は  $n(n+k-1) = 12 \sum_{i=1}^n \lambda_i$  である.

一方, VOA と MLDE の関係性について, VOA  $V$  が有理的<sup>\*2</sup>かつ  $C_2$ -余有限性<sup>\*3</sup> という条件を満たすとき次のことが言える.

**Proposition 2** ([24]).  $V$  を有理的かつ  $C_2$ -余有限な VOA とし, 既約加群  $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{n+h}$  の指標関数を

$$\text{ch}_M = \text{tr}_M q^{L_0 - c/24} = q^{h-c/24} \sum_{n=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{C}} M_{n+h}) q^n$$

とする. ここで,  $M_{n+h}$  は次数作用素  $L_0$  に関する有限次元固有空間とする. このとき, 中心電荷  $c$  と共形ウェイト  $h$  の値は有理数であり,  $\text{ch}_M$  は  $\tau \in \mathbb{H}$  の関数として正則関数である. また, 既約加群の指標で張られる空間  $\mathcal{X}_V$  は  $\Gamma_1$  による作用で不変となる. すなわち, 空間として  $\mathcal{X}_V|_0[\gamma] = \mathcal{X}_V$  ( $\gamma \in \Gamma_1$ ) が成り立つ.

<sup>\*1</sup> Kaneko-Zagier 方程式は  $\mathcal{M}_k(\Gamma_1)$  上の自己準同型写像  $E_4^{-1} \vartheta_k^2$  から導出している.

<sup>\*2</sup> 任意の  $V$ -加群が完全可約である.

<sup>\*3</sup>  $a_{-2}b$  ( $a, b \in V$ ) で生成される  $V$  の部分空間の余次元が有限である.

一般には、中心電荷と共形ウェイトの値は複素数であるが、上記の仮定からともに有理数となる。この Zhu による結果において、 $\mathcal{X}_V$  の  $\Gamma_1$  不変性は  $\mathcal{X}_V$  を含む解空間を持つ重さ 0 の MLDE の存在を示すことにより証明されている。

Proposition 1, 2 より  $\mathcal{X}_V$  の線型独立なすべての指標関数  $\text{ch}_M(\tau)$  を成分に持つ弱正則ベクトル値モジュラー形式<sup>\*4</sup>を考える事により、 $\mathcal{X}_V$  と MLDE の解空間が一致する場合の VOA は分類できるか? という問題が現れる。これに関する研究として [1, 2, 3] などがある。

### 3 Kaneko-Zagier 方程式

本稿の研究の基となっている、 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_V = 2$  となる場合、すなわち、Kaneko-Zagier 方程式に対応する結果について述べる。詳しい内容は [2, 11] を参照して頂きたい。

今、有理的かつ  $C_2$ -余有限性を満たす、 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_V = 2$  となる VOA  $V$  の存在を仮定すると、中心電荷  $c$ 、2つの共形ウェイト  $0, h(\neq 0)$  が有理数であり、非負整数  $a_n^i$  ( $i = 1, 2$ ) をもつ  $q$ -series

$$\text{ch}_V(\tau) = q^{-c/24} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 q^n \right), \quad \text{ch}_M(\tau) = q^{h-c/24} \left( a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 q^n \right)$$

が 2 階の重さ 0 の MLDE

$$g''(\tau) - \frac{1}{6} E_2(\tau) g'(\tau) + \alpha E_6(\tau) g(\tau) = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \quad (5)$$

の解であることが求められる。この MLDE (5) の exponent の計算により、

$$\left( -\frac{c}{24} \right) + \left( h - \frac{c}{24} \right) = \frac{1}{6}$$

がなりたつので、 $h = (c+2)/12$  である。よって、 $\alpha = -c(c+4)/24^2$  である。この  $\alpha$  の条件を代入して (5) を Serre 微分を用いて表現すると

$$\vartheta_0^2(g) - \frac{c(c+4)}{24^2} E_4 g = 0 \quad (6)$$

と表せるが、 $c = 2k$  とおき  $f = \eta^{2k} \cdot g$  とすると、この MLDE は (4) と一致する。これは、重さ 0 の MLDE (6) が中心電荷  $c$  となる VOA の指標関数を解に持つならば、それは Kaneko-Zagier 方程式の重さ  $k$  の解  $f$  を  $\eta^{2k}$  で割った関数で与えられることを示している。ここで、 $k \equiv 5 \pmod{6}$  のとき、Kaneko-Zagier 方程式は準モジュラー形式解を有しているので、 $c \not\equiv 10 \pmod{12}$  を仮定する ([9, Theorem 2])。

---

<sup>\*4</sup> カスプ  $\sqrt{-1}\infty$  のみに極を許す。

今, (6) の解として  $\text{ch}_V(\tau)$  を直接代入して計算することにより,

$$n\left(n - \frac{c+2}{12}\right)a_n^1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \left\{ e_{2,i} \left(n - i - \frac{c}{24}\right) + \frac{c(c+4)}{96} e_{4,i} \right\} a_{n-i}^1 \quad (7)$$

を得る.  $n = 1$  のとき,  $m = a_1^1$  とおくと, (7) より,

$$5c^2 + (22 + m)c - 10m = 0$$

を得る. この式の解  $c$  が有理数であることと判別式  $(m + 22)^2 + 200m$  がある整数の平方数となることを必要十分であることを用いて, 有限個の  $c$ :

$$c = \frac{2}{5}, 1, 2, \frac{14}{5}, 4, 5, \frac{26}{5}, 6, \frac{32}{5}, \frac{34}{5}, 7, \frac{38}{5}, 8, \frac{41}{5}, \frac{42}{5}, \frac{44}{5}, 9, \frac{46}{5}, \frac{47}{5}, \frac{48}{5}, \frac{49}{5}$$

を得る. この作業を  $n \geq 2$  に対しても行くと,  $n = 30$  の時点で

$$c = \frac{2}{5}, 1, 2, \frac{14}{5}, 4, \frac{26}{5}, 6, 7, \frac{38}{5}, 8 \quad (8)$$

の 10 個の候補が残ることになる. これらのうち,  $c = 2/5, 38/5$  以外の中心電荷に対応する VOA として, simple Lie 代数の Deligne exceptional series と呼ばれる系列

$$A_1 \subset A_2 \subset G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$$

に対する lattice VOA の指標と対応しており,  $c = 38/5$  の場合は川節氏により新たな頂点部分代数を構成されていて, その指標が与えられている ([15]). これらの中心電荷の候補 (8) に対して,  $\eta(\tau)^c \text{ch}_V(\tau)$  はレベルが 5 までの重さ  $c/2$  のモジュラー形式で表現すること出来る. この考察により中心電荷とモジュラー形式の重さとの関係は “ $c = 2k$ ” として考察されるのだが,  $c = 2/5$  の場合には, 多少事情が異なっている. この場合には simple Virasoro VOA を考える必要があり, 後に, この  $c = 2/5$  の値が *effective central charge* の値であると知ることとなる.

## 4 Simple Virasoro VOA

有理的かつ  $C_2$ -余有限性を持つ VOA としてよく知られている simple Virasoro VOA について簡単に述べる. なお, simple Virasoro VOA を **minimal model** と呼ぶ事もある.

Virasoro 代数  $\mathbf{Vir} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}c$  の中心電荷  $c$ , 最高ウェイト  $h$  の Verma 加群を  $M(c, h)$  として, 最高ウェイトベクトルを  $v_{c,h}$  とする. また,  $M(c, h)$  の既約商を  $L(c, h)$  で表す. このとき, 部分加群  $\langle L_{-1}v_{c,0} \rangle \subset M(c, 0)$  に対して,  $V(c, 0) := M(c, 0)/\langle L_{-1}v_{c,0} \rangle$

は VOA である ([5]).  $V(c, 0) \neq L(c, 0)$  となる必要十分条件は中心電荷が<sup>3</sup>, 互いに素な正整数  $p, q$  に対して

$$c = c_{p,q} = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$$

と表せる事である. このとき, minimal model  $L(c_{p,q}, 0)$  も VOA であり,  $C_2$ -余有限性や有理的であることが示されている ([23]). また, 既約  $L(c_{p,q}, 0)$ -加群は最高ウェイト

$$h_{r,s} = \frac{(rq - sp)^2 - (p - q)^2}{4pq}, \quad (1 \leq r \leq p - 1, 1 \leq s \leq q - 1)$$

をもつ既約最高ウェイト **Vir**-加群  $L(c_{p,q}, h_{r,s})$  により与えられる. よって VOA の加群としては,  $h_{r,s}$  が共形ウェイトとなる. 最高ウェイトが等しい既約加群は同型であり,  $h_{r,s} = h_{p-r, q-s}$  なので, 既約加群の個数は  $(p-1)(q-1)/2$  である. また, 共形ウェイト  $h_{r,s}$  の既約加群の指標を  $\chi_{r,s}^{p,q}$  とするとき, この指標関数は

$$\chi_{r,s}^{p,q}(\tau) = \frac{\Theta_{pq, rq-sp}(\tau) - \Theta_{pq, rq+sp}(\tau)}{\eta(\tau)} \quad (9)$$

というテータ級数  $\Theta_{a,b}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{a\{n+b/(2a)\}^2}$  ( $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ) の差と  $\eta(\tau)$  の比で表せる事が知られている. (cf. [7, Theorem 6.13]) また,  $\chi_{r,s}^{p,q}(\tau)$  は, ある  $(p-1)(q-1)/2$  階の重さ 0 の MLDE の解となる ([17]). このように, minimal model は, 指標たちの生成する空間と MLDE の解空間が一致する例である.

## 5 主結果

今, VOA として minimal model を仮定する. このとき, *effective central charge* と呼ばれる新たな値を  $\tilde{c} = c - 24h_{\min}$  で定義する. 但し,  $h_{\min} = \min_{1 \leq r \leq p-1, 1 \leq s \leq q-1} \{h_{r,s}\}$  とする. このとき,

$$h_{\min} = \frac{1 - (p - q)^2}{4pq}$$

となり<sup>\*5</sup>, *effective central charge* は

$$\tilde{c} = 1 - \frac{6}{pq}$$

となる. これにより,  $\eta(\tau)^{\tilde{c}} \chi_{r,s}^{p,q}(\tau)$  ( $1 \leq r \leq p-1, 1 \leq s \leq q-1$ ) のうち, 線型独立な  $(p-1)(q-1)/2$  個の関数を成分とするベクトル値関数は重さ  $\tilde{c}/2$  の  $\Gamma_1$  に関する正則ベクトル値モジュラー形式を構成する.

---

<sup>\*5</sup> これは伊吹山氏による指摘により得られた.

特に, (9)において,  $(p, q) = (2, N)$  ( $N > 3 : \text{odd}$ ) とし,  $u = (N - 2s + 1)/2$  とする. このとき,

$$\begin{aligned}\eta(\tau)^{\tilde{c}} \chi_{1,s}^{2,N}(\tau) &= \frac{\Theta_{2N,2u-1}(\tau) - \Theta_{2N,2(N-u)+1}(\tau)}{\eta(\tau)^{3/N}} \\ &= \eta(\tau)^{-3/N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( q^{\frac{N}{2} \left( \frac{2n}{2} + \frac{2u-1}{2N} \right)^2} - q^{\frac{N}{2} \left( \frac{2n-1}{2} + \frac{2u-1}{2N} \right)^2} \right) \\ &= \eta(\tau)^{-3/N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{N}{2} \left( n + \frac{2u-1}{2N} \right)^2}\end{aligned}$$

となる. この具体的な表示は Ibukiyama ([6, Theorem 1.1]) によって与えられた, 適当な multiplier system を持った主合同部分群

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \mid a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

に関する分数重さのモジュラー形式と定数倍を除いて一致することがわかる. よって VOA とモジュラー形式の関係の 1 つを具体的に提示できた. よって, minimal model の指標関数が  $(p-1)(q-1)/2$  階の重さ 0 の MLDE を満たすこと (§ 3) より以下の結論を得る.

**Theorem 1** ([20]).  $N > 3$  を奇数,  $\chi_{1,s}^{2,N}(\tau)$  ( $1 \leq s \leq N-1$ ) を  $L(c_{2,N}, 0)$ -加群  $L(c_{2,N}, h_{1,s})$  の指標関数とする. また, effective central charge を  $\tilde{c} = (N-3)/(2N)$  とする. このとき, 以下のことが成り立つ.

1. 主合同部分群  $\Gamma(N)$  に関する適当な multiplier system を持った重さ  $(N-3)/(2N)$  のモジュラー形式は  $\eta(\tau)^{\tilde{c}} \chi_{1,s}^{2,N}(\tau)$  の線型和で与えられる.
2. 主合同部分群  $\Gamma(N)$  に関する適当な multiplier system を持った重さ  $(N-3)/(2N)$  のモジュラー形式は,  $\Gamma_1$  に関する重さ  $(N-3)/(2N)$  の  $(N-1)/2$  階の MLDE の解である.

*Remark 1.* Gauss-Jacobi 恒等式 (e.g. [4, (1.18)])

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n v^{n(n+1)/2} w^{n(n-1)/2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - v^n w^{n-1})(1 - v^{n-1} w^n)(1 - v^n w^n)$$

を用いることにより,  $\chi_{1,s}^{2,N}(\tau)$  は無限積表示

$$\chi_{1,s}^{2,N}(\tau) = q^{h_{1,s} - c_{2,N}/24} \prod_{n \neq \pm s, 0 \pmod{N}} (1 - q^n)^{-1}$$

を持つので, 上記定理の分数重さのモジュラー形式も無限積表示を持つことがわかる.



上記の定理において,  $N = 5$  の場合を考えると, 中心電荷および共形ウェイトは  $c_{2,5} = -22/5$ ,  $h_{1,1} = 0$ ,  $h_{1,2} = -1/5$  であるが, effective central charge は  $\tilde{c} = -22/5 - 24(-1/5) = 2/5$  であるので, 定理より以下の 2 つの関数

$$\eta(\tau)^{2/5} \chi_{1,1}^{2,5}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)^{3/5}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{5}{2}(n+\frac{3}{10})^2} = q^{\frac{1}{5}} + O(q^{\frac{6}{5}})$$

$$\eta(\tau)^{2/5} \chi_{1,2}^{2,5}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)^{3/5}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{5}{2}(n+\frac{1}{10})^2} = 1 + O(q)$$

が得られる. これは, [6] において与えられている  $\Gamma(5)$  に関する  $\frac{1}{5}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -重さのモジュラー形式の生成元であるが, 特に [8] においては, supersingular  $j$ -invariants との関係についても研究がなされていることを付記しておく.

## 参考文献

1. Y. Arike, M. Kaneko, K. Nagatomo, Y. Sakai, Affine vertex operator algebras and modular linear differential equations, *Lett. Math. Phys.* **106** (5) (2016) 693–718.
2. Y. Arike, K. Nagatomo, Y. Sakai, Characterization of the simple Virasoro vertex operator algebras with 2 and 3-dimensional space of characters, to appear in *Contemp. Math.*, Am. Math. Soc.
3. Y. Arike, K. Nagatomo, Y. Sakai, Vertex operator algebras, minimal models, and modular linear differential equations of order 4, preprint(available at <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~arika/MinimalModelMLDE.pdf>).
4. A. G. Bytsko, A. Fring, Factorized combinations of Virasoro characters, *Commun. Math. Phys.*, **209**, 179–205 (2000)
5. I. Frenkel, Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.*, **66**, No. 1, 123–168 (1992)
6. T. Ibukiyama, Modular forms of rational weights and modular varieties, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **70**, no. 1, 315–339 (2000)
7. K. Iohara and Y. Koga, *Representation theory of the Virasoro algebra*, Springer-Verlag, London, 2011.
8. M. Kaneko, On Modular forms of weight  $(6n+1)/5$  satisfying a certain differential equation, *Number Theory, Developments in Mathematics*, **15** (2006), 97–102.
9. M. Kaneko, M. Koike, On modular forms arising from a differential equations of hypergeometric type, *Ramanujan Journal*, **7** (2003), 145–164.

10. M. Kaneko, M. Koike, On extremal quasimodular forms, *Kyushu J. Math.* **60** (2006), no. 2, 457–470.
11. M. Kaneko, K. Nagatomo, Y. Sakai, Modular forms and second order ordinary differential equations: applications to vertex operator algebras. *Lett. Math. Phys.* **103** (2013), no. 4, 439–453.
12. M. Kaneko, N. Todaka, Hypergeometric modular forms and supersingular elliptic curves, *Centre de Recherches Mathématique, CRM Proceedings and Lecture Notes*, **30** (2001), 79–83.
13. M. Kaneko, D. Zagier, Supersingular  $j$ -invariants, hypergeometric series, and Atkin’s orthogonal polynomials, *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*, **7** (1998), 97–126.
14. M. Kaneko, D. Zagier, A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms, *Progress in mathematics*, Birkhäuser (1995), 165–172.
15. K. Kawasetsu, The intermediate vertex subalgebras of the lattice vertex operator algebras. *Lett. Math. Phys.* **104** (2014), 157–178.
16. M. Miyamoto, Modular invariance of vertex operator algebras satisfying  $C_2$ -cofiniteness, *Duke Mathematical Journal*, **122**, (2004) 51–91.
17. A. Milas, Virasoro algebra, Dedekind  $\eta$ -function and specialized MacDonald identities, *Transformation Groups*, **9**, No. 3, 273–288 (2004)
18. S. D. Mathur, S. Mukhi, A. Sen, On the classification of rational conformal field theories, *Phys. Letter B*, **213**, No. 3, 303–308 (1988)
19. G. Mason, Vector-valued modular forms and linear differential operators, *Int. J. Number Theory*, **3**, no. 3, 377–390 (2007)
20. K. Nagatomo, Y. Sakai, Modular forms, modular linear differential equations and minimal models, submitted.
21. Y. Sakai, The generalized modular linear differential equations, submitted.
22. J. P. Serre, Congruences et formes modulaires, *Sém. Bourbaki*, **416** (1971/72)
23. W. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebras, *IMRN*, No 7, 197–211 (1993)
24. Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.*, **9**, 237–302 (1996)